باسمه تعالی

سؤالات امتحان هماهنگ درس : هندسه تحلیلی و جبرخطی	رشته : علوم ریاضی	ساعت شروع : ۹ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دوره ی پیش دانشگاهی « ۲۰ نمره ای»	گروه «ب»	تاریخ امتحان : ۱۳۸۸/۶/۲۵	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در شهریور سال تحصیلی ۸۸–۱۳۸۷			

ردیف	سوالات	نمره
۱	اگر (۳-و۲و۱)= a و (۲و۲و۲-)=b دو بردار در فضای $R^{۳}$ باشند: الف) بردار c=a-۳b را تعیین کنید . ب) تصویر قائم بردار a را بر امتداد بردار c به دست آورید . پ) بردار e_c را بیابید.	۱/۷۵
۲	اگر(۳و۲و۱)=A و (۴و۳و۱)=B و بردار a=i-k داده شده باشند : الف) زاویه بین بردار AB و بردار a را تعیین کنید. ب) مساحت متوازی الاضلاعی که با دو بردارa و AB ساخته می شود چقدر است ؟	۱/۵
۳	اگر a و b دو بردار دلخواه باشند ، ثابت کنید : $\|a+b\|^{۲}+\|a-b\|^{۲}=۲\|a\|^{۲}+۲\|b\|^{۲}$	۰/۷۵
۴	معادله پارامتری خط گذرا از نقطه (۷-و۵و۴) و موازی خط $L: x=\frac{z-۱}{۳}\ , y=۲$ را بنویسید .	۰/۷۵
۵	معادله صفحه عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه (۴و۱و۲)A و (۰و۵و۶)B را بنویسید .	۱
۶	خط L به معادله $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۳}{۳}=\frac{z}{-۱}$ و صفحه S به معادله $۳x-۲y+۴z=-۱$ مفروض است . الف) نشان دهید خط L و صفحه S موازی نیستند . ب) نقطه A ، نقطه تقاطع S,L را بیابید .	۱/۲۵
۷	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن (۲و۱)O بوده و بر خطی به معادله ۳x+۴y+۴=۰ مماس باشد.	۱
۸	معادله بیضی را بنویسید که (۲و۴)F و (۲و۲-)'F دو کانون آن بوده و طول قطر بزرگ آن ۱۰ سانتی متر باشد.	۱/۵
۹	معادله سهمی را بنویسید که رأس آن مبدأ مختصات و محور X ها ، محور تقارن آن بوده و از نقطه (۶و۳-) بگذرد .	۱
۱۰	مختصات کانون ها ، مرکز و رئوس هذلولی به معادله $۹y^{۲}-۱۶x^{۲}=۱۴۴$ را بدست آورده و نمودار آن را رسم کنید .	۱/۵
۱۱	با دوران محورهای مختصات به اندازه $\theta=\frac{\pi}{۴}$ حول مبدأ مختصات ، معادله زیر را نسبت به دستگاه جدید بازنویسی کرده و نوع مقطع را تعیین کنید . $x^{۲}+۸xy+y^{۲}=۷۵$	۱
~~۱۲~~	~~اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{۲}-۴IA+A^{T}$ را بدست آورید .~~	~~۱/۵~~
۱۳	اگر AB=BA که A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ یا ۳ و هر دو متقارن و یا پاد متقارن باشند ، ثابت کنید AB متقارن است .	۱/۵
۱۴	به کمک ویژگیهای دترمینان ثابت کنید : $\begin{vmatrix}۱+x & y & z\\ x & ۱+y & z\\ x & y & ۱+z\end{vmatrix}=۱+x+y+z$.	۱/۵
۱۵	الف) اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد ، ثابت کنید $\|A\|\neq ۰$ ب) دستگاه زیر را به روش ماتریس وارون و یا دستور کرامر حل کنید: $\begin{cases}x-۳y+۲z=۱\\ x+۲y+z=۸\\ ۳x+y-z=۲\end{cases}$	۱ ۱/۵
	جمع نمره	۲۰

کلید ارزیابی هندسه تحلیلی و جبرخطی (B)

۱-

الف) $C=(1,2,-3)-(-6,6,6)=(7,-4,-9)$ [0/125] [0/125]

ب) $P_c^a=\frac{a\cdot c}{|c|^2}c=\frac{7-8+27}{49+16+81}(7,-4,-9)=\frac{26}{146}(7,-4,-9)$ [0/125] [0/5]

پ) $e_c=\frac{1}{|c|}c=\frac{1}{\sqrt{146}}(7,-4,-9)$ [0/125] [0/25]

۲-

الف) $\overrightarrow{AB}=(0,1,1)$ [0/25], $a=(1,0,1)$ $\cos\theta=\frac{a\cdot\overrightarrow{AB}}{|a||AB|}=\frac{1}{2}$ [0/25] [0/25]

$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$ [0/25]

$S_{\square}=|a\times\overrightarrow{AB}|=|(-1,-1,1)|=\sqrt{3}$ [0/25] [0/25]

۳- $|a+b|^2+|a-b|^2=|a|^2+|b|^2+\cancel{2a\cdot b}+|a|^2+|b|^2-\cancel{2a\cdot b}=2|a|^2+2|b|^2$ [0/25] [0/25] [0/25]

۴- $u=u'=(1,0,3)\Rightarrow L':\frac{x-4}{1}=\frac{z+7}{3},\ y=5$

۵- $n=\overrightarrow{AB}=(4,4,-4)\Rightarrow n'(1,1,-1)\parallel n\Rightarrow\Gamma: x+y-z=5$

وسط AB: $M=(4,3,2)$

۶-

الف) $L\parallel S\iff n\cdot u=0$ [0/125] ; $\begin{cases}n=(3,-2,4)\\u=(2,3,-1)\end{cases}\Rightarrow n\cdot u=6-6-4=-4\neq0\Rightarrow L\nparallel S$ [0/25]

ب) $L:(x=2t-1,\ y=3t-3,\ z=-t)$ [0/25] $\xrightarrow[\text{صفحه}]{\text{جایگذاری در}}$ $6t-3-6t+6-4t=-1\Rightarrow t=$ [0/25]

$A=(1,0,-1)$ [0/25]

۷- $r=d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{15}{3}=5$ [0/25] [0/25] $\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=25$ [0/5]

۸- مرکز $O=(1,2)$; محور افقی [0/25] ; $2a=10\Rightarrow a=5$ [0/25]

$|FF'|=2c=6\Rightarrow c=3$ [0/25] $\xrightarrow{a^2=b^2+c^2}b=\sqrt{25-9}=4$ [0/25]

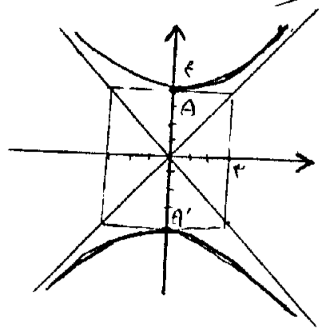
$\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ [0/5]

۹- $S=(0,0)$، محور افقی $\Rightarrow$ محور x ها [0/25] $\Rightarrow y^2=4ax$ [0/25], $(-3,6)\in$ سهمی $\Rightarrow 36=-12a\Rightarrow a=-3$ [0/25] $\Rightarrow y^2=-12x$ [0/25]

۱۰/ $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ هذلولی قائم (۰/۱۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} a^2=16 \\ b^2=9 \\ \text{مرکز}=(0,0) \end{cases}$ (۰/۱۲۵) (۰/۱۲۵) $\Rightarrow F,F'\left|\begin{matrix}0\\ \pm c\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}0\\ \pm 5\end{matrix}\right.$ (۰/۲۵)

$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$

$A,A'\left|\begin{matrix}0\\ \pm a\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}0\\ \pm 4\end{matrix}\right.$ (۰/۱۲۵)



(۰/۱۲۵)

۱۱/ $R_\theta=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$ (۰/۱۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt2}{2}(x'-y') \\ y=\frac{\sqrt2}{2}(x'-y') \end{cases}$

$\Rightarrow \frac12(x'-y')^2+4(x'^2-y'^2)+\frac12(x'+y')^2=75$ (۰/۲۵)

$5x'^2-3y'^2=75 \Rightarrow \dfrac{x'^2}{15}-\dfrac{y'^2}{25}=1$ (۰/۱۲۵) هذلولی افقی (۰/۲۵)

۱۲/ $A^2=\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -16\\ 12 & 24\end{bmatrix}$ (۰/۱۲۵) , $4IA=4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -16\\ 12 & 24\end{bmatrix}$ (۰/۱۲۵) (۰/۵)

$\Rightarrow \cancel{A^2}-\cancel{4IA}+A^T=A^T=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -4 & 6\end{bmatrix}$ (۰/۲۵) (۰/۱۲۵)

۱۳/ متقارن: $\left.\begin{matrix}A^T=A\\ B^T=B\end{matrix}\right\}$ (۰/۱۲۵) یا پادمتقارن $\begin{cases}A^T=-A\\ B^T=-B\end{cases}$ (۰/۱۲۵) $\Rightarrow (AB)^T=B^TA^T=BA$ یا $((-B)(-A))=A$… (۰/۱۲۵) (۰/۱۲۵) (۰/۱۲…

۱۴/ طرف اول $=\begin{vmatrix}1+x+y+z & y & z\\ 1+x+y+z & 1+y & z\\ 1+x+y+z & y & 1+z\end{vmatrix}$ (۰/۱۲۵) $\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } C_1} (1+x+y+z)\begin{vmatrix}1 & y & z\\ 1 & 1+y & z\\ 1 & y & 1+z\end{vmatrix}$ (۰/۱۲۵)

$\xrightarrow{R_3-R_1\Rightarrow R_1} (1+x+y+z)\begin{vmatrix}1 & y & z\\ 1 & 1+y & z\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$ (۰/۱۲۵) $\xrightarrow{R_2-R_1\Rightarrow R_2} (1+x+y+z)\begin{vmatrix}1 & y & \cdot\\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$ (۰/۱۲۵)

$\xrightarrow{\text{بالا مثلثی}} (1+x+y+z)(1\times1\times1)=1+x+y+z$ (۰/۱۲۵) (۰/۱۲۵)

۱۵/ الف) A وارون‌پذیر $\Rightarrow \exists A^{-1};\ AA^{-1}=A^{-1}A=I$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$

$|AA^{-1}|=|I| \Rightarrow |A|\,|A^{-1}|=1\neq 0 \Rightarrow |A|\neq 0$ (۰/۱۲۵) (۰/۱۲۵) (۰/۲۵)

$|A|=-25\neq 0$ (۰/۱۲۵)

ب) $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 8\\ 2\end{bmatrix}$ (۰/۱۲۵) ; $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$ (۰/۱۲۵)

$\Rightarrow A^*=\begin{bmatrix}-3 & -1 & -7\\ 4 & -7 & 1\\ -5 & -10 & 5\end{bmatrix}$ (۰/۵) $\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{-1}{25}A^* \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/25 & 1/25 & 7/25\\ -4/25 & 7/25 & -1/25\\ 5/25 & 10/25 & -5/25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 8\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ (۰/…

[illegible]